

EJERCICIO 1: [2,5]

Obtén la función derivada.

- a) [0,5] $y = \frac{x^2 + 3}{2x - 5}$
b) [0,75] $y = 5x^2 \ln(4x)$
c) [0,75] $y = e^{3x-1} \operatorname{sen}(x^3)$
d) [0,5] $y = \sqrt{4x^5 + 2 \cos(x)}$

EJERCICIO 2: [3,5]

Consideremos la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \ln(3x - 2) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) [0,75] Estudia su continuidad
b) [1,25] Estudia su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.
c) [0,5] ¿Se anula en algún punto su derivada?
d) [1] Representa su gráfica.

EJERCICIO 3: [2]

De la función $y = 2x^3 + ax^2 + bx - 3$ se sabe que pasa por el punto $P = (2, 7)$ y que para $x = \frac{2}{3}$ se anula su derivada segunda.

¿Cuáles son los valores de a y de b ?

EJERCICIO 4: [2]

Se sabe que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq 1 \\ ax + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es continua en todo punto.

- a) [0,75] Averigua el valor de a .
b) [1,25] Calcula $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

EJERCICIO 1:

$$a) y' = \frac{2x(2x-5) - 2(x^2+3)}{(2x-5)^2} = \frac{2x^2 - 10x - 6}{(2x-5)^2}$$

$$b) y' = 10x \ln(4x) + 5x^2 \cdot \frac{1}{4x} \cdot 4 = 10x \ln(4x) + 5x$$

$$c) y' = e^{3x-1} \cdot 3 \cdot \text{sen}(x^3) + e^{3x-1} \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3e^{3x-1} (\text{sen}(x^3) + x^2 \cos(x^3))$$

$$d) y' = \frac{1}{2\sqrt{4x^5+2\cos(x)}} \cdot (20x^4 - 2\text{sen}(x)) = \frac{20x^4 - 2\text{sen}(x)}{2\sqrt{4x^5+2\cos(x)}}$$

EJERCICIO 2:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \ln(3x - 2) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Continuidad: f sólo puede ser discontinua para $x = 0$ y $x = 1$ (separa-fórmulas):

$$x = 0$$

VALOR: si $x = 0$ es $y = 1$

$$\text{TENDENCIAS: } \begin{cases} \text{si } x \rightarrow 0_- \text{ es } y = x^2 + 2x + 1 \rightarrow 1 \\ \text{si } x \rightarrow 0_+ \text{ es } y = 2x + 1 \rightarrow 1 \end{cases}$$

Concluimos que es continua en $x = 0$.

$$x = 1$$

VALOR: si $x = 1$ es $y = 3$

$$\text{TENDENCIAS: } \begin{cases} \text{si } x \rightarrow 1_- \text{ es } y = 2x + 1 \rightarrow 3 \\ \text{si } x \rightarrow 1_+ \text{ es } y = \ln(3x - 2) \rightarrow 0 \end{cases}$$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito ($s = -3$) para $x = 1$.

Derivabilidad: podemos derivamos directamente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{3}{3x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente

$$x = 0$$

Como f es continua, puede ser derivable:

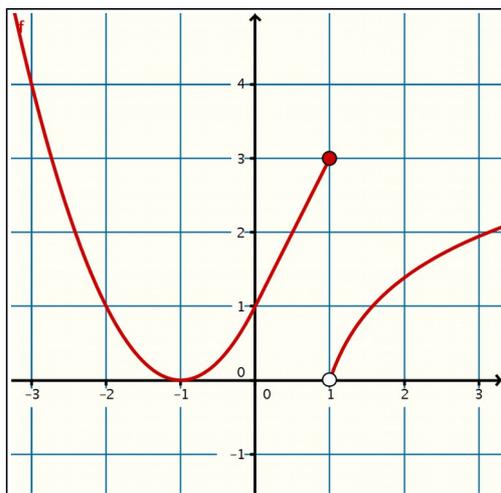
$$\text{DERIVADAS LATERALES: } \begin{cases} \text{si } x \rightarrow 0_- \text{ es } y' = 2x + 2 \rightarrow 2 \\ \text{si } x \rightarrow 0_+ \text{ es } y' = 2 \rightarrow 2 \end{cases}$$

Como coinciden concluimos que es derivable para este valor con $f'(0) = 2$.

$$x = 1$$

Como la función no es continua, no puede ser derivable.

b) La gráfica se compone de un trozo de parábola + trozo de recta + trozo de curva logarítmica. Con unas tablas de valores obtenemos:



EJERCICIO 3:

Derivamos sucesivamente:

$$y = 2x^3 + ax^2 + bx - 3 \rightarrow y' = 6x^2 + 2ax + b \rightarrow y'' = 12x + 2a$$

Veamos las condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } x = 2 \text{ es } y = 7 \rightarrow 16 + 4a + 2b - 3 = 7 \\ \text{si } x = \frac{2}{3} \text{ es } y'' = 0 \rightarrow 12 \cdot \frac{2}{3} + 2a = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{resolviendo}} a = -4, b = 5$$

EJERCICIO 4:

a) La función sólo podría ser discontinua para $x = 1$ (separa-fórmulas):

VALOR: si $x = 1$ es $y = 3$

TENDENCIAS: $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x \rightarrow 1_- \text{ es } y = x^2 + 2x \rightarrow 3 \\ \text{si } x \rightarrow 1_+ \text{ es } y = ax + 1 \rightarrow a + 1 \end{array} \right.$

Como sabemos que es continua, deben coincidir, por ello:

$$a + 1 = 3 \rightarrow a = 2$$

b) Colocamos ya $a = 2$. Podemos derivar directamente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 2 = 0.$$

$$f'(2) = 2$$

$f'(1)$ no puede calcularse directamente. Sabemos que para $x = 1$ es continua:

DERIVADAS LATERALES: $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x \rightarrow 1_- \text{ es } y' = 2x + 2 \rightarrow 4 \\ \text{si } x \rightarrow 1_+ \text{ es } y' = 2 \rightarrow 2 \end{array} \right.$

Como no coinciden concluimos que no es derivable para este valor (es un *punto anguloso*).