

EJERCICIO 1:

Tras un test realizado a un nuevo modelo híbrido de automóvil, se ha observado que el consumo de gasolina, $C(x)$, expresado en litros, viene dado por la función

$$C(x) = 4.5 - 0.05x + 0.00025x^2$$

siendo x la velocidad en km/h y $25 \leq x \leq 175$.

- [0,5] Determine el consumo de gasolina a las velocidades de 50 km/h y 150 km/h.
- [1] Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.
- [1] ¿A qué velocidades de ese intervalo se obtienen el mínimo y el máximo consumo? ¿Cuáles son éstos?

EJERCICIO 2:

Dada la función $y = x^3 + ax^2 + bx$

- [1,5] Determine los valores de a y de b sabiendo que $(2, 8)$ es un punto de inflexión.
- [1] Para $a = -3$ y $b = -9$, estudie su monotonía y obtenga las coordenadas de sus extremos relativos.

EJERCICIO 3: Dada la función $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}$

- [0,5] Estudie su continuidad.
- [0,5] Obtenga sus asíntotas.
- [1,5] Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f para $x = 2$.

EJERCICIO 4:

Para la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

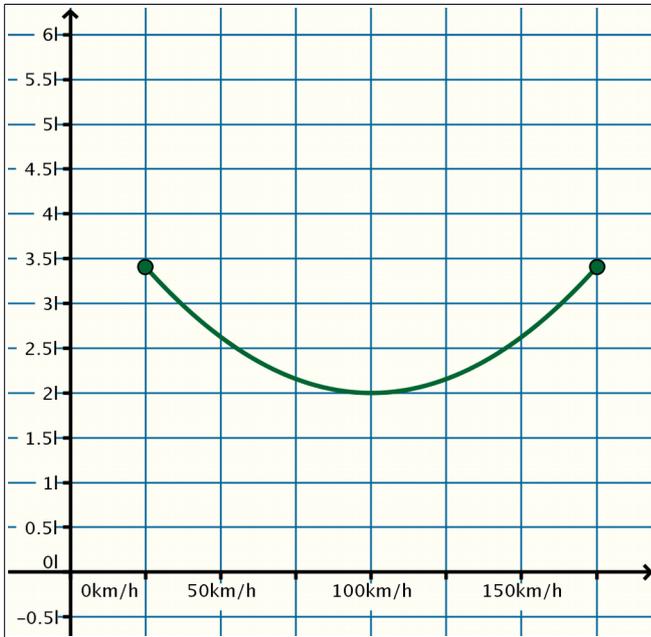
- [1] Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.
- [0,75] Analice algebraicamente la monotonía de f e indique dónde presenta extremos relativos.
- [0,75] Dibuje su gráfica.

EJERCICIO 1:

Vamos a dibujar su gráfica: se trata de una parábola cóncava con vértice en

$$x_v = \frac{-b}{2a} = 100 \rightarrow y_v = 2$$

Con una tabla de valores adecuada:



a) $C(50) = C(175) = 2.625$

Así, a ambas velocidades consume el mismo combustible: 2.625 litros

b) Observamos que la parábola decrece en el intervalo $[25, 100]$ y crece en $[100, 175]$.

Luego al ir la velocidad de 0 a 100 km/h el consumo disminuye y al ir de 100 a 175 km/h el consumo disminuye.

c) En la gráfica apreciamos que el mínimo absoluto es el vértice de la parábola y que el máximo absoluto se alcanza tanto en el punto inicial como en el final.

Así, el máximo consumo es aproximadamente 3.4 litros tanto a 25 como a 175 km/h y el mínimo se consigue a una velocidad de 100 km/h.

EJERCICIO 2:

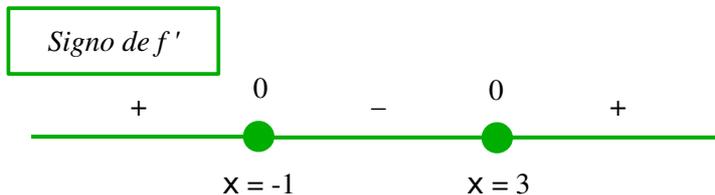
a) Obtengamos primero la derivada segunda:

$$y = x^3 + ax^2 + bx \rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow y'' = 6x + 2a$$

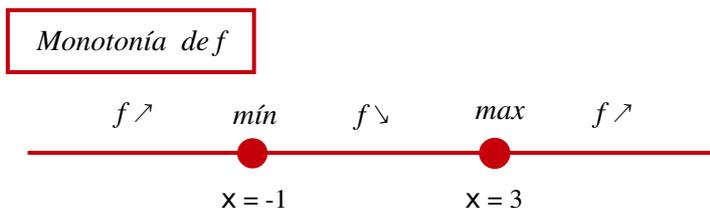
Como tiene un punto de inflexión en el punto $(2, 8)$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } x = 2 \text{ es } y = 8 \rightarrow 8 + 4a + 2b = 8 \\ \text{si } x = 2 \text{ es } y'' = 0 \rightarrow 12 + 2a = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{resolviendo}} a = -6, b = 12$$

b) Hallemos la derivada $y = x^3 - 3x^2 - 9x \rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 9$ y estudiemos su signo:



De ahí sacamos los intervalos de monotonía. En los cambios aparecen los extremos relativos:



Como pasa de crecer a decrecer hay un máximo relativo en el punto $x = -1, y = 5$.

Como pasa de decrecer a crecer hay un mínimo relativo en el punto $x = 3, y = -27$.

EJERCICIO 3:

a) f sólo puede ser discontinua para los ceros del denominador: $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$.

$$x = 3$$

VALOR: si $x = 3$ es $y = \left[\frac{5}{0} \right] =$ no existe

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \rightarrow 3_- \text{ es } y \rightarrow \left[\frac{5}{-0} \right] = -\infty \\ \text{si } x \rightarrow 3_+ \text{ es } y \rightarrow \left[\frac{5}{+0} \right] = +\infty \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = 3$.

b) Asíntotas verticales: Hay discontinuidad de salto infinito para $x = 3 \rightarrow x = 3$

Asíntotas horizontales: El límite en el infinito es $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{x - 3} = \frac{2}{1} = 2$ (grados) $\rightarrow y = 2$

c) Para hallar la ecuación de la recta tangente derivemos primero:

$$f'(x) = \frac{5(x - 3) - 1(2x - 1)}{(x - 3)^2} = \frac{-5}{(x - 3)^2}$$

La ecuación de la recta tangente para $x = 2$:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \rightarrow y - (-3) = -5(x - 2) \rightarrow y = -5x + 7$$

EJERCICIO 4:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Continuidad: f sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (separa-fórmulas):

$$x = 0$$

VALOR: si $x = 0$ es $y = 1$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \rightarrow 0_- \text{ es } y = x + 1 \rightarrow 1 \\ \text{si } x \rightarrow 0_+ \text{ es } y = x^2 - 4x + 1 \rightarrow 1 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 0$.

Derivabilidad: podemos derivamos directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente

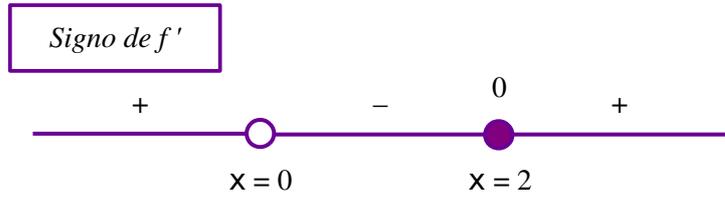
$$x = 0$$

Como f es continua, puede ser derivable:

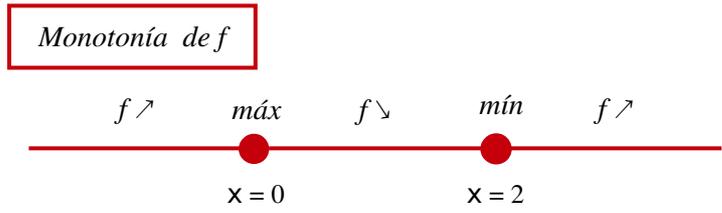
DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si } x \rightarrow 0_- \text{ es } y' = 1 \rightarrow 1 \\ \text{si } x \rightarrow 0_+ \text{ es } y' = 2x - 4 \rightarrow -4 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que no es derivable para este valor (punto anguloso).

b) Estudiamos el signo de la derivada primera. Observemos que para $x = 0$ no hay derivada por ser punto anguloso.



De ahí sacamos los intervalos de monotonía. En los cambios de monotonía aparecen los extremos relativos:



c) La forman un trozo de recta ($y = x + 1, x \leq 0$) + un trozo de parábola ($y = x^2 - 4x + 1, x > 0$). El vértice de la parábola lo encontramos para $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$.

Con unas tablas de valores adecuada obtenemos:

