

Instrucciones

1. Elige entre realizar bien los tres ejercicios de la Opción A, bien los tres ejercicios de la Opción B, sin mezclar los de una opción con los de otra.
2. El ejercicio de Álgebra vale 3 puntos, el de Análisis 3 puntos y el Probabilidad y Estadística 4 puntos.
3. Contesta las preguntas razonando tus conclusiones; la mera respuesta numérica no vale para obtener la puntuación máxima en cada apartado. Justifique siempre las respuestas.
4. Escribe de forma ordenada y con letra clara.
5. Se permite el uso de una calculadora no programable y no gráfica. Si obtiene resultados directamente con ella, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda.

Tiempo

90 minutos

Criterios de Evaluación

Los criterios esenciales de valoración serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin que se lleve a cabo de forma efectiva no puede ser suficiente para obtener una valoración positiva del mismo.

En los ejercicios en los que se pida una deducción razonada, la mera aplicación de un fórmula no será suficiente.

No se prohibirá el uso de calculadoras, aunque durante el examen no se permitirá el préstamo de ellas entre estudiante. En cualquier caso, los procesos que conducen al resultado deben estar razonados.

Los errores cometidos en un apartado no se tendrán en cuenta en la calificación de apartados posteriores que sean afectados.

Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio.

La presentación clara y ordenada se valorará positivamente.

OPCIÓN A**EJERCICIO 1.** [3]

- a) [2] Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones

$$5x + y \leq 5, \quad 9y - 2x \geq 0, \quad x + 2y \geq 2, \quad x \geq 0$$

y determine sus vértices.

- b) [1] Determine, en ese recinto, los puntos donde la función
- $F(x, y) = 6x + y - 3$
- toma los valores máximo y mínimo.

EJERCICIO 2. [3]

El beneficio de una empresa viene dado por la función

$$f(x) = \frac{225}{2} + 20x - \frac{1}{2}x^2$$

donde x representa el gasto en publicidad.

- a) [0'5] Calcule el gasto x a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.
- b) [1] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esa función.
- c) [1] Represente gráficamente la función f .
- d) [0'5] Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?

EJERCICIO 3. [4]**Parte 1.** [2]

En un conjunto de estudiantes, el 15% estudia alemán, el 30% estudia francés y el 10% ambas materias.

- a) [1] ¿Son independientes los sucesos “estudiar alemán” y “estudiar francés”?
- b) [1] Si se elige un estudiante al azar, calcule la probabilidad de que no estudie ni francés ni alemán.

Parte 2. [2]

A 400 personas elegidas al azar se les ha preguntado su gasto anual en libros, obteniéndose una cantidad media de 22000 ptas. Con independencia de esta muestra se sabe que la desviación típica de la inversión en libros de la población es de 4.000 ptas.

- a) [1] Halle un intervalo de confianza al 90% y centrado, para la media poblacional de esta inversión.
- b) [1] ¿Qué tamaño muestral sería necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese (21904, 22096)?

OPCIÓN B**EJERCICIO 1.** [3]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) [2] Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + 2B = A^t$.
- b) [1] Calcule la matriz A^{2000} .

EJERCICIO 2. [3]

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 8x + 17 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) [1'17] Répresentela gráficamente y estudie su continuidad y derivabilidad.
- b) [0'75] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos.
- c) [0'5] Los extremos hallados anteriormente, ¿son puntos donde $f'(x) = 0$?

EJERCICIO 3. [4]**Parte 1.** [2]

Un ladrón, al huir de un policía, puede hacerlo por las calles A , B ó C , con las siguientes probabilidades

$$p(A) = 0'25, \quad p(B) = 0'6 \quad \text{y} \quad p(C) = 0'15$$

La probabilidad de ser alcanzado si huye por la calle A es 0'4, si huye por la calle B es 0'5, y si huye por la C es 0'6.

- a) [1] Halle la probabilidad de que el policía alcance al ladrón.
- b) [1] Si el ladrón ha sido alcanzado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido alcanzado en la calle A ?

Parte 2. [2]

Una máquina que envasa aceite en garrafas de 5 litros está ajustada de manera que la cantidad que llena sigue una ley normal con desviación típica 0'15 litros.

- a) [1] Calcule un intervalo de confianza del 95% para la media del contenido de las garrafas que llena esta máquina sabiendo que una muestra aleatoria de 36 de ellas dio un contenido medio de 4'97 litros.
- b) [1] ¿Contiene las garrafas 5 litros de aceite?

OPCIÓN A**EJERCICIO 1.** [3]

La región factible de un problema de programación lineal es la intersección del primer cuadrante con los 3 semiplanos definidos por las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{8} \leq 1, \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{8} \geq 1, \quad \frac{x}{10} + \frac{y}{4} \geq 1$$

- a) [2] Dibuje dicha región y determine sus vértices.
b) [1] Calcule el mínimo de la función $F(x, y) = 4x + 5y$ en el recinto anterior.

EJERCICIO 2. [3]

- a) [1] Calcule la derivada de cada una de las funciones siguientes:

$$g(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad h(x) = x \operatorname{sen} x$$

- b) [2] Estudie el crecimiento y el decrecimiento de una función cuya función derivada viene dada gráficamente por la recta que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

EJERCICIO 3. [4]**Parte 1.** [2]

En un Instituto se ofertan tres modalidades excluyentes A, B y C y dos idiomas excluyentes: Inglés y Francés. La modalidad A es elegida por un 50% de alumnos, la B por un 30% y la C por un 20%. También se conoce que han elegido Inglés el 80% de los alumnos de la modalidad A, el 90% de la modalidad B y el 75% de la C, habiendo elegido Francés el resto de los alumnos.

- a) [1] ¿Qué porcentaje de estudiantes del Instituto ha elegido Francés?
b) [1] Si se elige al azar un estudiante de Francés, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la modalidad A?

Parte 2. [2]

La altura de los jóvenes andaluces se distribuye según una ley normal de media desconocida y varianza 25 cm^2 .

Se ha seleccionado una muestra aleatoria y con una confianza del 95% se ha construido un intervalo para la media poblacional cuya amplitud es de $2,45 \text{ cm}$.

- a) [1] ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?
b) [1] Determine el límite superior y el inferior del intervalo de confianza si la muestra tomada dio una altura media de 170 cm .

OPCIÓN B**EJERCICIO 1.** [3]

Se considera el sistema

$$S : \begin{cases} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$$

- [2] Resuélvalo y clasifíquelo en función del número de soluciones.
- [1] Determine si es posible, o no, eliminar una de las ecuaciones, de forma que el sistema que resulte sea equivalente al anterior. Razone la respuesta.

EJERCICIO 2. [3]

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ Lx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- [1] Calcule el valor de "a" para que f sea continua en $x = -1$.
- [1] Represente gráficamente la función anterior si $a = 3$
- [1] Justifique la existencia o no de derivada en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ para la función obtenida en el apartado anterior.

EJERCICIO 3. [4]**Parte 1.** [2]

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que

$$p(A) = 0'7, \quad p(B) = 0'6 \quad \text{y} \quad p(A \cup B) = 0'9$$

- [1] Justifique si A y B son independientes.
- [1] Calcule $p(A/B^c)$ y $p(B/A^c)$

Parte 2. [2]

Se conoce que el número de días de permanencia de los enfermos de un hospital sigue una distribución normal de media 8'1 días y desviación típica 9 días. Se elige, al azar, una muestra de 100 enfermos.

- [1] Razone cuál es la distribución de la media muestral.
- [1] ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 8 y 10 días?

OPCIÓN A**EJERCICIO 1.** [3]

a) [1'5] Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S : \begin{cases} 2x + y + mz = -2 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + my - 2z = -4 \end{cases}$$

calcule, para $m = 1$, la inversa de la matriz de coeficientes.

b) [1'5] Resuelva, para $m = -1$, el sistemas del apartado anterior.

EJERCICIO 2. [3]

El precio en bolsa de las acciones de una empresa durante las cinco horas que dura una jornada bursátil, medido en pesetas, viene dado por la función $C: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida así:

$$C(t) = 100(t^2 - 6t + 25)$$

donde t representa el tiempo medido en horas.

- a) [1'5] Dibuje la gráfica de C , indicando las subidas y bajadas en el precio de cada acción durante la sesión, así como su precio en el instante inicial.
- b) [1] ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que alcanzan las acciones a lo largo de la jornada?
- c) [0'5] Si la sesión bursátil durara tres horas más y se rigiera por la misma función, ¿cuál sería la tendencia en el precio de las acciones? ¿Cuál sería la cotización al cabo de las ocho horas?

EJERCICIO 3. [4]**Parte 1.** [2]

En un famoso concurso de televisión basta con responder acertadamente a 15 preguntas para ganar 50 millones de pesetas. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas, de las que sólo una es verdadera.

- a) [1] Determine la probabilidad de que un concursante que no sabe ninguna pregunta y responde al azar pueda ganar los 50 millones.
- b) [1] Determine la probabilidad de que un concursante con cultura media que sólo conoce las respuestas correctas de las 5 primeras preguntas, acierte las respuestas de las 10 últimas, si éstas las contesta al azar.

Parte 2. [2]

La duración de los matrimonios en un país se distribuye según una ley normal con desviación típica 4'8 años.

- a) [1] Si se toma una muestra de 64 matrimonios cuya media es 16 años, halle un intervalo de confianza al 95% para la media de la población.
- b) [1] Si sabemos que la media poblacional es 15, ¿cuál es la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño 100 sea superior a 16'35 años?

OPCIÓN B**EJERCICIO 1.** [3]

Sea el recinto dado por las inecuaciones:

$$2y \geq x + 3, \quad -y \geq -x, \quad x \leq 5$$

- [1] Representelo gráficamente.
- [1] Calcule sus vértices.
- [1] ¿En qué puntos del recinto alcanza la función $f(x, y) = -2x + y - 1$ sus valores extremos?

EJERCICIO 2. [3]

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x < 2 \\ -x + 4 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ (x - 4)^2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- [1] Estudie su continuidad y derivabilidad.
- [1] Represente gráficamente la función
- [1] Halle sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

EJERCICIO 3. [4]**Parte 1.** [2]

El 80% de los alumnos de un IES son aficionados al fútbol y el 60% al cine; la mitad de los alumnos de ese IES lo son a las dos cosas. Se elige un alumno al azar:

- [1] Halle la probabilidad de que no sea aficionado a ninguna de las dos cosas.
- [1] ¿Cuál es la probabilidad de que sea aficionado al cine sabiendo que no es aficionado al fútbol?

Parte 2. [2]

En una muestra aleatoria de 225 individuos se ha obtenido una media de edad de 16'5 años. Se sabe que la desviación típica de la población de la que procede esa muestra es de 0'7 años.

- [1] Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la edad media de la población.
- [1] ¿Qué error se comete en la estimación anterior?

OPCIÓN A**EJERCICIO 1.** [3]

- a) [2] Represente y calcule los vértices de la región determinada por las inecuaciones siguientes.

$$x \geq 0, y \geq 0, y - x \leq 2, y - x \geq -1, 2y + x \leq 7$$

- b) [1] Calcule el valor máximo de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en la región anterior y el punto donde lo alcanza.

EJERCICIO 2. [3]

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x+1} & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 2x + a & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \frac{2}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) [1'5] Halle el valor de a para que f sea continua. Para dicho valor de a , ¿es f derivable?
 b) [1'5] Para el caso de $a = 2$, dibuje la gráfica de f .

EJERCICIO 3. [4]**Parte 1.** [2]

La población española está compuesta por un 55% de mujeres, de las que un 8% ha realizado en alguna ocasión una compra por Internet. Se sabe que la probabilidad de que una persona haya comprado alguna vez usando Internet es 0'3.

Halle la probabilidad de que un hombre, elegido al azar, haya comprado alguna vez por Internet.

Parte 2. [2]

Las notas de un examen se distribuyen según una ley normal de media 5'6 y varianza 9. Seleccionamos al azar 16 estudiantes y calculamos la media de sus notas.

- a) [1'5] Calcule la probabilidad de que dicha media esté comprendida entre 4'7 y 6'5.
 b) [0'5] Si en lugar de seleccionar 16 estudiantes, seleccionamos 25, ¿aumentará o disminuirá la probabilidad calculada en el apartado anterior? Razone la respuesta.

OPCIÓN B**EJERCICIO 1.** [3]

- a) [1'5] Plantee, son resolver, el sistema de ecuaciones necesario para dar solución al siguiente problema: "Una empresa de repostería tiene 10 vehículos entre motocicletas (2 ruedas), turismos (4 ruedas) y pequeños camiones de reparto (6 ruedas). El impuesto municipal, por vehículo es de 2000 pta., 5000 pta. y 8000 ptas, respectivamente. Sabiendo que ha pagado un total de 41000 pta por este concepto y que el total de ruedas de sus vehículos es de 34, ¿cuántos vehículos tiene de cada tipo?
- b) [1'5] Halle $A + A^{-1}$ para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2. [3]

La altura, en metros, que alcanza una pelota lanzada hacia arriba en función del tiempo (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento, viene dada por la expresión:

$$f(t) = \frac{5t}{2} - \frac{t^2}{2}$$

- a) [1] Represente gráficamente f .
- b) [1] ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 4 segundos? ¿Al cabo de cuánto tiempo llegará al suelo?
- c) [1] ¿En qué instante alcanzará la pelota su altura máxima? ¿Cuál es dicha altura?

EJERCICIO 3. [4]**Parte 1.** [2]

De una lista de 10 personas, de las que 7 son hombres, seleccionamos 2 personas al azar. Calcula la probabilidad de que sean de distinto sexo en los siguientes casos:

- a) [1] Se eligen sin reemplazo.
- b) [1] Se eligen con reemplazo

Parte 2. [2]

En una población, una variable aleatoria sigue una ley normal con desviación típica 12.

- a) [1] Si en una muestra de tamaño 100, tomada al azar, se ha observado que la media es 40, determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la media de la población.
- b) [1] Con un nivel de confianza del 90% se ha construido un intervalo para la media poblacional cuyo límite inferior ha sido 36'71. ¿Qué tamaño de muestra se ha tomado en este caso?

OPCIÓN A**EJERCICIO 1.** [3]

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- [1] Calcule AA' .
- [1] Halle la matriz inversa de A para $a = 8$.
- [1] ¿Tiene inversa A cuando $a = 7$?

EJERCICIO 2. [3]

- [1'5] Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$, calcule a y b para que f tenga un punto de inflexión en $(-1, 2)$.
- [1'5] Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 1$ en cada uno de los puntos en los que su pendiente sea igual a 3. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

EJERCICIO 3. [4]**Parte 1.** [2]Dos sucesos A y B son tales que

$$p(A) = 0'30, \quad p(B|A) = 0'10 \quad \text{y} \quad p(\overline{A \cup B}) = 0'63$$

- [1'5] ¿Es A independiente de B ? ¿Es B independiente de A ?
- [0'5] Calcule $p(\overline{A \cup B})$

Parte 2. [2]

Una población está formada por los 4 números siguientes: 3, 7, 11, 15.

- [0'5] Encuentre todas las muestras posibles, con reemplazamiento, de tamaño 2.
- [1] Halle la media y la desviación típica de la distribución muestral de medias.
- [0'5] Halle la media y la desviación típica de la población.

OPCIÓN B**EJERCICIO 1.** [3]

Sea el recinto definido por las inecuaciones

$$x \leq \frac{1}{3}(x+y), \quad x+y \leq 18, \quad y \leq 15, \quad x \geq 0$$

- a) [2] Represente dicho recinto y determine sus vértices.
 b) [1] Halle el punto de éste donde se hace mínima la función $F(x, y) = 80x + 100(15 - y)$. ¿Cuál es ese valor mínimo?

EJERCICIO 2. [3]

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) [2] Representéla gráficamente y, a la vista de su gráfica, determine sus máximos y mínimos relativos, así como su crecimiento y decrecimiento.
 b) [1] Estudie su continuidad y derivabilidad.

EJERCICIO 3. [4]**Parte 1.** [2]

En una clase el 60% de los alumnos aprobó Historia y la mitad de la clase aprobó Inglés. Se sabe que el 70% de los alumnos que aprobaron Historia aprobó Inglés.

- a) [1] Halle la probabilidad de que un alumno cualquiera de la citada clase apruebe al menos una de las dos asignaturas.
 b) [0'5] Calcule el porcentaje de los alumnos que, habiendo aprobado Inglés, aprueban Historia.
 c) [0'5] ¿Son independientes los sucesos “aprobar Historia” y “aprobar Inglés”? Razone la respuesta.

Parte 2. [2]

Se sabe que el intervalo $(2'9, 3'7)$ es un intervalo de confianza al 95% para el peso medio, en kilogramos, de los recién nacidos en el año 1999, elaborado a partir de una muestra de 200 de ellos.

- a) [1] Comente, razonadamente si se puede deducir del intervalo de confianza dado la siguiente afirmación: “el peso medio de los recién nacidos del año 1999 es seguro que está entre 2'9 y 3'7 kilogramos”.
 b) [1] ¿Qué se podría hacer para tener un intervalo de confianza más pequeño?

OPCIÓN A**EJERCICIO 1.** [3]

Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) [1'5] Calcule las matrices: $A = M^{-1}$ y $B = 2M - M'$.
- b) [1'5] Resuelva la ecuación $XM + B = I_2$.

EJERCICIO 2. [3]La derivada de la función f definida de \mathbb{R} en \mathbb{R} es $f'(x) = x^{+x} - 6$.

- a) [1] Determine, si es posible, para qué valores de x alcanza f su máximo y su mínimo relativos.
- b) [1] Calcule un punto de inflexión de esta función y determine si es único o pueden existir otros.
- c) [1] Sabiendo que $f(0) = 3$, deduzca razonadamente si es $f(1) < 3$ o $f(1) > 3$.

EJERCICIO 3. [4]**Parte 1.** [2]La tabla adjunta muestra los resultados de una encuesta realizada entre varias personas con estudios primarios (P), medios (M) y superiores (S), sobre la pregunta de si fuman (F) o no fuman (F^c):

	P	M	S
F	190	120	12
F^c	60	280	138

- a) [0'5] ¿Cuál es la probabilidad de que una persona encuestada con estudios primarios fume? ¿Y si tiene estudios superiores?
- b) [0'75] ¿Son independientes los sucesos “tener estudios superiores” y “no fumar”?
- c) [0'75] ¿Cuál es la probabilidad de que una persona encuestada que fume no tenga estudios superiores?

Parte 2. [2]

El tiempo de reacción de un automovilista ante un obstáculo inesperado sigue una distribución normal con desviación típica de 0'1 segundos. Deduzca el tamaño con el que se ha de tomar una muestra para tener una confianza del 90% de que el error de estimación del tiempo medio de reacción no supere los 0'02 segundos.

OPCIÓN B**EJERCICIO 1.** [3]

- a) [1'5] El triángulo limitado por las rectas

$$2x=7, \quad 5y-4x=11, \quad 2x+5y=17$$

representa la solución de cierto sistema de inecuaciones lineales. Determine ese sistema de inecuaciones

- b) [1] Calcule los puntos del recinto anterior en los que la función $F(x, y)=2x+7y$ alcanza sus valores máximo y mínimo.
- c) [0'5] Encuentre dichos valores máximo y mínimo.

EJERCICIO 2. [3]

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) [1] Represente gráficamente la función.
- b) [2] Estudie su continuidad, asíntotas, monotonía y extremos.

EJERCICIO 3. [4]**Parte 1.** [2]

De entre los alumnos que cursan 2º curso del Bachillerato de Ciencias de la Salud, el 80% elige Estadística como optativa y el resto Matemáticas II. No hay alumnos que cursen las dos materias a la vez. El 40% de los alumnos que eligen Estadística supera el curso, mientras de los que eligen Matemáticas II el 55% supera el curso.

- c) [1] Elegido un alumno al azar, calcule la probabilidad de que supere el curso.
- d) [1] Si un alumno ha superado el curso, calcule la probabilidad de que haya elegido Estadística.

Parte 2. [2]

Sea la población $\{-1, -2, 3, 4\}$.

Forme todas las muestras sin reposición y de tamaño 2, y calcule la media y la varianza de las medias muestrales, comparando los resultados obtenidos con la media y varianza de la población.